ЛЕКЦІЯ № 10В

Канонічні перетворення. Додатки.

Розглянемо деякі прикладення канонічних перетворень.

Покажемо, що еволюція з часом динамічних змінних є канонічним перетворенням. Як було показано в лекції №9 (див. (21.10)), при розгляді дії, як функції початкових і кінцевих координати та часу, при зміні цих величин зміна дії дорівнює

$$dS = \sum p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)} . \qquad (23.1)$$

З іншого боку, якщо розглядати $p_i^{(1)} = p_i$, $q_i^{(1)} = q_i$ і $H^{(1)} = H$ в якості початкових координат, імпульсів і гамільтоніану в момент часу $t^{(2)} = t$, а $p_i^{(2)} = P_i$, $q_i^{(2)} = Q_i$ і $H^{(2)} = H'$ - як кінцеві координати, імпульсів і гамільтоніан в момент часу $t^{(2)} = t + \tau$, то вираз (23.1) перепепишется у вигляді

$$dS = \sum P_i dQ_i - \sum p_i dq_i - \left(H' - H \right) dt . \qquad (23.2)$$

Якщо порівняти це з формулою (22.16) з лекції №10А для зміни твірної функції $F\left(q_i, Q_i, t\right)$:

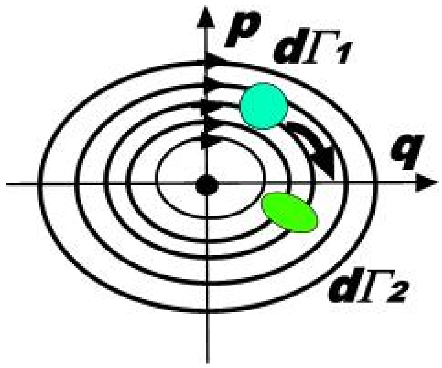
$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + \left(H' - H \right) dt , \qquad (23.3)$$

то ми бачимо, що рух по справжній траєкторії в фазовому просторі являє собою безперервну послідовність канонічних перетворень з твірною функцією $F\left(q, q + \delta q, t\right) = -S\left(q, t\right)$.

Перейдемо до доказу важливої в механіці та статистичній фізиці теоремі Ліувіля .

Теорема Ліувілля .

При канонічних перетвореннях зберігається не тільки вид рівнянь Гамільтона, а й деякі інтеграли, т.зв. *інтегральні інваріанти.* Згадаймо фазові портрети динамічних систем з одним ступенем вільності, розглянуті в лекції №4, наприклад фазовий портрет осцилятора в консервативній системі (Рис.23.1).



23.1. Трансформація елемента фазової площини під час руху гармонійного осцилятора.

Як з часом змінюється елемент площі фазової площини при русі зображуючих точок з цього елемента об'єму? Виберемо область фазової площини з площею $d\Gamma_1 = dp(t_1)dq(t_1)$. Через період коливання всі ізображаючі точки повертаються у вихідне положення. Тому фазовий об’єм перейде сам до себе. А чи збережеться він у довільний момент часу? На це питання відповідає ***теорема Ліувілля*** :

Якщо система є гамільтонової, то в її фазовому просторі з часом елемент фазового простору у процесі динаміки не змінює свого об’єму.

Ця теорема безпосередньо пов'язана з тематикою канонінічних перетворень. Як показано вище, динаміка системи є канонічним перетворенням. Зокрема, перехід елемента $d\Gamma_1$ в елемент $d\Gamma_2$ на Рис.23.1 являє собою канонічне перетворення. З іншого боку, у попередній лекції було наведено приклади простих канонічних перетворень, які зберігали об’єм елементів фазового простору.

Теорема Ліувілля (Жозеф Ліувілль, 1804-1882) відіграє фундаментальну роль у статистичній механіці. Тому наведемо її доказ. Насамперед, розглянемо зміни координат і імпульсів при нескінченно малій (інфінітезімальній) зміні часу в гамільтоновій системі. Виберемо як твірну функцію розглянуту в попередній лекції функцію $\Phi(q,P)$, для якої зв'язок нових і старих змінних має вигляд (див.(22.20)):

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \; Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}. \tag{23.4}$$

Якщо у якості функції $\Phi(q,P)$ вибрати $\Phi_0 = \sum q_i P_i$, то отримаємо тотожне перетворення $Q_i = q_i$ і $P_i = p_i$. (Див. приклад у лекції №9). Тому виберемо твірну функцію, що слабко відрізняється від неї:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\varphi = \sum q_i P_i + \varepsilon\varphi(q_i, P_i),\ \varepsilon << 1. \tag{23.5}$$

Тоді з (23.4) випливає

$$p_i = P_i + \varepsilon\frac{\partial\varphi(q,P)}{\partial q_i},\ Q_i = q_i + \varepsilon\frac{\partial\varphi(q,P)}{\partial P_i}. \tag{23.6}$$

Оскільки нові та старі імпульси відрізняються на малу величину ε, то в основному наближенні за ε співвідношення (23.6) можна переписати так:

$$P_i = p_i - \varepsilon\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_i},\ Q_i = q_i + \varepsilon\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p_i}. \tag{23.7}$$

Зверніть увагу на аргументи. Оскільки перед похідними стоїть малий параметр, то в самих похідних можна замінювати нові імпульси на старі. З рівнянь Гамільтона $\dot{q} = \partial H / \partial p$, $\dot{p} = -\partial H / \partial q$ для малих прирощень часу випливає

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t) - \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}\Delta t,\ q_i(t+\Delta t) = q_i(t) + \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}\Delta t. \tag{23.8}$$

Порівнюючи ці два вирази з виразами (23.7), бачимо, що вони збігаються, якщо розуміти під величиною ε нескінченно мале збільшення часу $\Delta t = \varepsilon << 1$, вважати, що $P_i(t) = p_i(t+\Delta t)$, $Q_i(t) = q_i(t+\Delta t)$, і прирівняти твірну функцію φ гамільтоніану системи. Тобто. *нескінченно мала зміна гамільтонової системи з часом є канонічним перетворенням. Рух є еквівалентним безперервно здійснюваному канонічному перетворенню під дією твірної функції, якою є гамільтоніан системи.* (Іншим способом це було продемонстровано на початку лекції).

Розглянемо зміну фазового об'єму при канонічному перетворенні змінних. В теорії багатократних інтегралів є загальна теорема про перетворення таких інтегралів при перетворенні координат. Найбільш просто і наочно вона виглядає для випадку 2 змінних. Якщо заміна змінних має вигляд $x = x(\phi,\psi)$, $y = y(\phi,\psi)$, то

$$\int G(x,y)\,dxdy = \int G\big(x(\phi,\psi),\,y(\phi,\psi)\big)\,D(x,y;\phi,\psi)\,d\phi\, d\psi\,, \tag{23.9}$$

де так званий *якобіан переходу* має вигляд

$$D(x,y;\phi,\psi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \phi}. \tag{23.10}$$

У нашому випадку

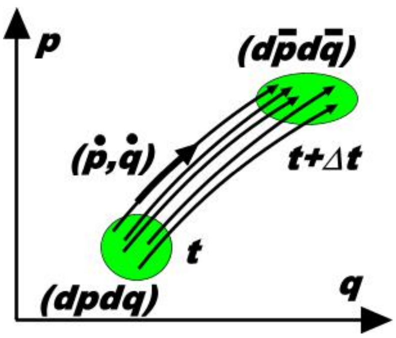
$$\iint ...dPdQ = \iint ...D(P,Q;p,q)\,dpdq \text{ с } D = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}. \tag{23.11}$$

Але, як було показано в лекції №9 (див.(22.26)), ця величина для якобіана переходу *для канонічного перетворення* з твірною функцією W дорівнює одиниці. Тобто.

$$\iint ...dPdQ = \iint ...dpdq \tag{23.12 }$$

і величина фазового об'єму при канонічному перетворенні зберігається (див. Рис.22.1 та 23.1). Це доводить теорему Ліувілля в системі з одним ступенем свободи.

Доведемо теорему Ліувілля у випадку довільного числа ступенів волі. Достатньо її довести на інфінітоземальній ділянці процесу протягом нескінченно малого відрізку часу Δt. Розглянемо $2n$ -мірний фазовий об'єм системи з n ступенями волі $(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_n)$- Рис.23.2.



23.2. Фазовий потік на фазовій площині елемента фазового простору.

Кожній початковій умові відповідає своя фазова траєкторія своєї точки зображення. Сукупність фазових траєкторій утворює *фазовий потік* у фазовому просторі. Кожна точка фазової траєкторії характеризується своїми координатами та імпульсами $(\vec{q},\vec{p})$ та вектором швидкості зображуючої точки $(\dot{\vec{p}},\dot{\vec{q}})$, де всі вектори $n-$мірні. Розглянемо зміни координат і імпульсів зображаючої точки за час Δt, якщо система описується рівняннями Гамільтона, тобто якщо система є гамільтоновою. Вони визначаються рівняннями (23.8). Позначатимемо змінні в початковий момент часу t через (q,p), а змінні в момент часу $t+\Delta t$- через $(\overline{q},\overline{p})$. Тоді рівняння (23.8) з урахуванням гамільтонових рівнянь перепишуться як

$$\overline{p}_i = p_i + \dot{p}_i\Delta t\,,\ \overline{q}_i = q_i + \dot{q}_i\Delta t\,. \tag{23.13}$$

Для наочності розглянемо систему із двома ступенями свободи. Для неї якобіан переходу у формулі (23.11) $\int ...d\overline{p}d\overline{q} = \int ...D\,dpdq$ має вигляд

$$D = \begin{vmatrix} \partial\overline{p}_1/\partial p_1 & \partial\overline{p}_1/\partial p_2 & \partial\overline{p}_1/\partial q_1 & \partial\overline{p}_1/\partial q_2 \\ \partial\overline{p}_2/\partial p_1 & \partial\overline{p}_2/\partial p_2 & \partial\overline{p}_2/\partial q_1 & \partial\overline{p}_2/\partial q_2 \\ \partial\overline{q}_1/\partial p_1 & \partial\overline{q}_1/\partial p_2 & \partial\overline{q}_1/\partial q_1 & \partial\overline{q}_1/\partial q_2 \\ \partial\overline{q}_2/\partial p_1 & \partial\overline{q}_2/\partial p_2 & \partial\overline{q}_2/\partial q_1 & \partial\overline{q}_2/\partial q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\partial\dot{p}_1/\partial p_1\Delta t & \partial\dot{p}_1/\partial p_2\Delta t & \partial\dot{p}_1/\partial q_1\Delta t & \partial\dot{p}_1/\partial q_2\Delta t \\ \partial\dot{p}_2/\partial p_1\Delta t & 1+\partial\dot{p}_2/\partial p_2\Delta t & \partial\dot{p}_2/\partial q_1\Delta t & \partial\dot{p}_2/\partial q_2\Delta t \\ \partial\dot{q}_1/\partial p_1\Delta t & \partial\dot{q}_1/\partial p_2\Delta t & 1+\partial\dot{q}_1/\partial q_1\Delta t & \partial\dot{q}_1/\partial q_2\Delta t \\ \partial\dot{q}_2/\partial p_1\Delta t & \partial\dot{q}_2/\partial p_2\Delta t & \partial\dot{q}_2/\partial q_1\Delta t & 1+\partial\dot{q}_2/\partial q_2\Delta t \end{vmatrix}$$

Тобто на діагоналі матриці стоять члени $1+(\partial\dot{x}_i/\partial x_i)\Delta t$ із малими добавками до одиниці. Решта членів пропорційні малому параметру Δt. Найбільший внесок у якібіан дають члени, що стоять на діагоналі. Їхній добуток дає

$$D = 1 + \left(\frac{\partial\dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial\dot{p}_2}{\partial p_2} + \frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\dot{q}_2}{\partial q_2}\right)\Delta t + O(\Delta t)^2. \tag{23.14}$$

Решта доданків детермінанта також мають величину порядку $(\Delta t)^2$і менше. Таким чином, якобіан переходу приблизно дорівнює

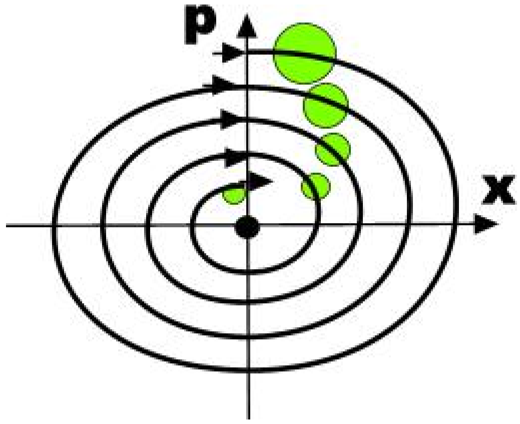
$$D \approx 1 + div\overline{S}\cdot\Delta t\,, \tag{23.15}$$

де $\vec{S}$- швидкість зображуючої точки у фазовому просторі, і величина, що стоїть у дужках, є дивергенцією швидкості потоку. Підставляємо у (23.14) значення швидкостей з рівнянь Гамільтона і отримуємо:

$$D \approx 1 + \left(-\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} \right)\Delta t = 1. \qquad (23.16)$$

Очевидно, як доводиться це твердження у разі більшої кількості змінних. Отже, теорему Ліувілля доведено.

Підкреслимо, що теорема Ліувілля справедлива лише для гамільтонових систем. У негамільтонових системах, наприклад, у системах із загасанням, вона не виконується. Згадаймо лінійний осцилятор з малим тертям, розглянутий у лекції №9. Фазовий портрет такого осцилятора зображено Рис.23.3.



23.3. Стиснення фазового об'єму з часом для осцилятора зі слабким тертям.

Стиснення фазового об’єму в цьому випадку очевидно: з часом всі точки зображення потрапляють в особливу точку типу стійкого фокусу: двомірний об’єкт (площа) стягується в нуль-вимірний - точку.

Завдання В що переходить нескінченно малий квадрат (див. малюнок) зі сторонами $2\varepsilon \times 2\varepsilon$, зображений на фазовій площині гармонійного осцилятора, що описується рівнянням $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ з $\omega_0 > 1$ при зміні часу на величину $\Delta t = \pi / 2\omega_0$?